Matrice şi determinanţi: Operaţii cu matrice, proprietăţi. Calculul determinanţilor. Inversa unei matrice, ecuaţii matriciale.

1) Matricea A∈M_3(R), $A=\begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, cu x∈R, a∈R, este inversabilă pentru ∀x∈ R dacă:

A) a∈ $(2,+\infty)$; B) a∈ $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$; C) a∈ $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$; D) a∈ $\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$; E) a∈ $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$;

2)	Să se rezolve ecuaţia matriceală: $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$			
a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Fie matricea $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Matricea *X* verifică ecuația:

A) $X^2+X-8I_2=O_2$; B) $X^2-2X+I_2=O_2$; C) $2X^2-5X+8I_2=O_2$; D) $X+4I_2=O_2$; E) $5X^2+X-I_2=O_2$;

4) Fie A∈$M_3(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} x & 1 & m \\ x & x & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, x∈$\mathbb{R}$, m∈$\mathbb{R}$. Valorile parametrului *m* pentru care A este inversabilă sunt:

A) $(4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{3})$; B) $(3-\sqrt{2},3+2\sqrt{3})$; C) $(4-\sqrt{2},4+\sqrt{2})$; D) $(4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$
E) (1, 3);

5) Să se determine matricea X care verifică ecuația $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

A) $X=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; B) $X=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; C) $X=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; D) $X=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;
E) $X=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

6) Știind că matricea X este inversabilă, sistemul :

$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ XY=X \end{cases}$, are solutia :

a) X = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; Y = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) X = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Y = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) X = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; Y = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) X = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; Y = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) X = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Y = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

7) Matricea :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \propto & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}$$ are rangul doi pentru:

a) $\begin{cases} \propto = 2 \\ \beta = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \propto = -1 \\ \beta = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \propto = -3 \\ \beta = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \propto = 1 \\ \beta = -10 \end{cases}$ $e)$ $\begin{cases} \propto = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$

8) Matricea

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisface relatia $A^3 = mA^2 + nA$ pentru :

a) $\begin{cases} m = -3 \\ n = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} m = 3 \\ n = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} m = -3 \\ n = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} m = 3 \\ n = -7 \end{cases}$

9) Fie A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ .Atunci A^n= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$, iar $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n+y_n}{5^n+1}$ este:

a) 1 b) 0 c) 2 d) -2 e)-1

10) Fie matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Ştiind că $A^2 + A^3 + .. + A^n = \propto_n A$, atunci $\propto_n$ este:

a) $2 - 2^n$, b)2^n , c)$2^n - 2$, d)$2^n + 1$, e) $2^n - 3$.

11) Fie matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .Se cere:

a) Sa se demonstreze ca : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$,$(\forall)\ n \in N^*$

b) Sa se calculeze det $(A + A^2 + \cdots A^n)$.

12) Sa se arate ca: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{12} = 2^{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13) Fie matricea $A \in M_3(R)$, unde $A = \begin{pmatrix} \propto & 1 & 1 \\ 1 & \propto & 1 \\ 1 & 1 & \propto \end{pmatrix}$

Se cere :

a) Sa se determine valorile lui $\propto$ pentru care matricea A este nesingulara.

b) Pentru $\propto = 2$, sa se gaseasca inversa matricei A.

14) Fie matricea $A \in M_2(R)$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sa se calculeze A^n.

15) $A^2-(a+d)A+(\det A)I_2=O_2$

Sisteme de ecuaţii liniare: Studiul compatibilităţii, teoremele lui Kronecker-Capelli şi Rouché. Sisteme omogene. Metode de rezolvare a sistemelor liniare: rezolvare matriceală, metoda Cramer şi metoda Gauss.

1)	Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x+3y+z=8 \\ x+2y+3z=7 \\ 3x+y+2z=9 \end{cases}$			
a) $x=1,\ y=2,\ z=3$	b) $x=2,\ y=1,\ z=1$	c) $x=3,\ y=2,\ z=2$	d) $x=1,\ y=1,\ z=4$	e) $x=1,\ y=3,\ z=2$

2) Mulțimea valorilor parametrului real *a*, pentru care sistemul

$$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$$

nu are soluție unică este:

A) $a\in\varnothing$; B) $a\in\{-2,1\}$; C) $a\in R$; D) $a\in(3,4)$; E) $a\in\{-1,2\}$;

3) Se considera ecuația :

$$\begin{vmatrix} \ln x & \ln a_1 & \ln a_2 & \ln a_3 \\ \ln a_1 & \ln x & \ln a_3 & \ln a_2 \\ \ln a_2 & \ln a_3 & \ln x & \ln a_1 \\ \ln a_3 & \ln a_2 & \ln a_1 & \ln x \end{vmatrix} = 0$$. Radacinile ei sunt :

a) $x_1=a_1a_2a_3$, $x_2=a_1a_3$, $x_3=a_1a_2$, $x_4=a_2a_3$;

b) $x_1=\frac{1}{a_1a_2a_3}$, $x_2=\frac{a_1a_2}{a_3}$, $x_3=\frac{a_1a_3}{a_2}$, $x_4=\frac{a_2a_3}{a_1}$

c) $x_1=x_2=x_3=x_4=a_1a_2a_3$

d) $x_1=\frac{1}{a_1a_2a_3}$, $x_1=\frac{a_1}{a_2a_3}$, $x_2=\frac{a_2}{a_1a_3}$, $x_4=\frac{a_3}{a_1a_2}$

e) $x_1=\frac{1}{a_3a_2}$, $x_2=\frac{1}{a_1a_3}$, $x_3=\frac{1}{a_1a_2}$, $x_4=\frac{1}{a_1a_2a_3}$.

4) Se considera ecuația:

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix} = 0$$, unde a este constant .

Soluția ecuației este:

a) x = a, b) x = $\frac{a}{2}$, c) x = -a, d) x =-$\frac{a}{2}$, e) x = 2a.

5) Se considera șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, care este determinantul de ordinul *n*, iar a ∈ R:

$$\begin{vmatrix} a+x & a & \dots & a \\ a & a+x & \dots & a \\ \dots & \dots & & \dots \\ a & a & \dots & a+x \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^*.$$

Dacă L=$\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0}\frac{a_{n+1}}{xa_n})$, atunci :

a) L = 0 , b) L = a , c)L =1 , d)L =∞ , e)L = 2a.

6) Fie progresia geometrica a_1 , a_2 , a_3 , … , a_n , cu rația *r*. Valoarea determinantului D :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1^2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2^2 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

, în funcție de a_1 și *r* este:

a) D = $a_1^n r^n$
b) D = $a_1 r^{n-1}$
c) D = $a_1^{2n} r^n$
d) D = $a_1^n r^{n(n-1)}$
e) D = $a_1^{2n} r^{n(n-1)}$

7) Se consideră sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ ax + a^2y - z = a^2 \end{cases}$$

, a ∈ R , este simplu nedeterminat pentru:

a) a = 5; b) a = -1; c) a = 2; d) a = 1; e) a = -3

8) Se consideră sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mx + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2m-1)x + 2y + z = n \end{cases}$$

, m,n ∈ R

Sistemul este incompatibil pentru:

a) $\begin{cases} m = 1 \\ n \neq 2 \end{cases}$ b)$\begin{cases} m = 0 \\ n \neq 1 \end{cases}$ c)$\begin{cases} m = -3 \\ n = 2 \end{cases}$ d)$\begin{cases} m = 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$ e)$\begin{cases} m = 3 \\ n \neq 3 \end{cases}$

9)	Fie $x_1, x_2, x_3 \in C$ rădăcinile polinomului $P = X^3 + X + 1$ şi $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$ Atunci:			
a) $d = 0$	b) $d = 1$	c) $d = -1$	d) $d = -\frac{1}{2}$	e) $d = -\frac{3}{2}$

10)	Mulţimea valorilor parametrului real *a*, pentru care sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$ nu are soluţie unică este:			
a) $a \in \phi$	b) $a \in \{-2,1\}$	c) $a \in R$	d) $a \in (3,4)$	e) $a \in \{-1,2\}$

11)	Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei $x^3 - 3x + 2 = 0$ şi $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$. Valorea determinantului d este:			
a) d=10	b) d=1	c) d= -1	d) d=0	e) d=3

12)	Soluţia sistemului $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x + y + 2z = 7 \end{cases}$ este:			
a) *x= -2, y=1, z= -2*	b) *x=2, y=1, z=2*	c) *x= -2, y= -1, z= -2*	d) *x= -5, y= -1, z= -2*	e) *x= -6, y= -1, z= -2*

13) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - mx^2 + 3x - 4 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = m$ sunt:

a) $-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}$; b) -3, 0, 3; c) $-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}$; d) -1, 0, 2; e) 3,1,4

14) Să se calculeze determinantul d = $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației:

$x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

a) d =4; b) d =3; c) d =5; d) d =1; e) d =-1;

15) Sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ 3x + ay + z = 1 \\ 3x + y + az = 1 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R},$$

este simplu nedeterminat dacă:

A) a= 1; B) a∈ $\{-3,2\}$; C) a=0; D) a=-1; E) a=-2;

Reprezentarea grafică a funcţiilor: Intervale de monotonie, puncte de extrem. Convexitate, concavitate, puncte de inflexiune. Asimptote verticale, orizontale, oblice. Studiul variaţiei unei funcţii şi reprezentare grafică.

1)	Fie $f: D \to R$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - ax - b}$, unde $a, b \in R$ şi D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f. Dacă graficul lui f admite asimptota verticală $x = 1$ şi are extrem local în $x_0 = 3$, atunci:			
a) $a=-1, b=-2$	b) $a=8, b=-7$	c) $a=1, b=2$	d) $a=-2, b=-3$	e) $a=-5$, $b=-3$

2) Fie funcția f:(-∞, 1]∪(2, +∞)→ℜ, $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x-2}}$. Care sunt asimptotele funcției?

a) x=2, y=0; b) x=1, y=x; c) x=2, $y = x + \frac{1}{2}, y = -x - \frac{1}{2}$; d) x=2, y=x+1; e) y=1, y=-x+1;

3)	Fie $f: R \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2}$, unde $a, b \in R$. Dacă $A(-2, \frac{1}{2})$ este punct de extrem local al lui *f*, atunci:			
a) $a=2, b=1$	b) $a=2, b=2$	c) $a=1, b=1$	d) $a=-1, b=1$	e) $a=2$, $b=3$

4)	Ce asimptotă oblică admite graficul funcţiei $f: (0, \infty) \to R$, $f(x) = \frac{(x+3)(x-1)^2}{x^2}$			
a) $y = x - 1$	b) $y = x + 3$	c) $y = x + 2$	d) $y = x + 1$	e) $y = 2x + 3$

5) Să se determine parametrii reali a și b astfel încât funcția: $f(x) = \frac{ax^2+5}{x+b}$ să aibă asimptotă oblică spre +∞ dreapta y=x+1.

a) a=1, b=1; b) a=1, b=−1; c) a=1, b=0; d) a=−1, b=1; e) a=2, b=1;

6) Sa se determine a si b , numere reale , astfel incat dreapta y = $\frac{1}{4}$ x +1 sa fie asimptota la graficul functiei f : D ->R , f(x) = $\frac{x^3}{(ax+b)^2}$. Sa se determine apoi toate asimptotele functiei .

7) Se da funcția f:R->R , f(x) = $\sqrt{|x^2 - 5x + 4|}$

a) Sa se determine asimptotele funcției f;
b) Sa se determine a, b, c ∈ R astfel incat dreptele y = 1 , x = 2 , x = 3 sa fie asimptote la graficul functiei : g(x) = $\frac{f^2(x)}{ax^2+bx+c}$

8) Să se determine parametrul real *m*, pentru care funcția f:R->R ,
f(x) = ln (1+x^2)-mx este crescatoare pe R.

9) Fie f(x)= $\frac{(x-1)^3}{x^2+x+1}$, f:R->R . Se cere :

a) Sa se determine punctele de inflexiune.

b) Sa se reprezinte grafic funcția.

10) Se consideră funcția $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.

a) Sa se reprezinte grafic

b) Sa se determine constantele reale *a*, *b* astfel încât funcția
$F(x) = (ax+b)\sqrt{x}$ sa verifice conditia $F'(x) = f(x)$, $x \in (0, \infty)$.

c) Sa se determine $x \in (0, \infty)$, astfel incat :
$x^2 f''(x) + x f'(x) = \sqrt{x} - 1$.