Pregătire Admitere – Algebră şi analiză matematică; 27.04.2013

Numere complexe: Forma algebrică şi trigonometrica a unui număr complex. Conjugatul şi modulul unui număr complex, egalitatea a două numere complexe, operaţii cu numere complexe, rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex.

1	Dacă numărul complex $z = a + ib$ verifică egalitatea $\bar{z} + 2z = 6 - 3i$, atunci			
a) a=2, b= -3	b) a=2, b=1	c) a=1, b=1	d) a= -1, b= -1	e) a= -1, b=3

2	Să se determine α ∈ R astfel încât numărul complex $\frac{1-i\sqrt{3}}{\alpha+(\alpha+1)i}$ să fie real.			
a) $\alpha = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$	b) $\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$	c) $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$	d) $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$	e) $\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

3	Să se determine toate numerele complexe z∈ C care verifică ecuaţia: $$\lvert z\rvert - z = 1 + 2i$$			
a) $z = \frac{3}{2} - 2i$	b) $z = -\frac{1}{2} + i$	c) z_1=1; $z_2 = -\frac{1}{2} - i$	d) z_1=0; $z_2 = \frac{3}{2} + 2i$	e) z_1 = 1+i; z_2 = 1-3i

4	Fie z_1 rădăcina reală a ecuației $z^3 - 2(3+i)z^2 + (10+9i)z - 3(1+3i) = 0$ și z_2 și z_3 celelalte rădăcini. Calculați S_1 și S_2 unde $S_1 = \sum_{k=1}^{3} \lvert z_k\rvert^2$ și $S_2 = \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_2}$			
a) S_1 = 8 și S_2 = 21;	b) S_1 = 16 și $S_2 = \frac{21-3i}{10}$;	c) S_1 = 25 și S_2 = 3+4i;	d) S_1 = 10 și S_2 = 7-i;	e) S_1 = 13 și S_2 = 3i;

5	Dacă $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze valoarea expresiei următoare. $$E = (1 + 2a + 3a^2)(1 + 2a^2 + 3a)$$			
a) 3	b) 1+i	c) 1-i	d) 1	e) -1

6. Fie numărul complex z = 1+i
   a) Să se scrie sub formă trigonometrică , apoi să se calculeze z^n folosind formula lui Moivre;
   b) Sa se dezvolte $(1+i)^n$ cu binomul lui Newton;
   c) Egalând rezultatele de la punctele a) si b) să se deducă egalitățile :

      α) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$;

      β) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$;

7. Fie numărul complex $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   Același enunț ca la problema precedentă pentru a demonstra egalitățile:

   α) $1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \ldots = (-1)^n\, 2^n \cos\frac{2n\pi}{3}$;

   β) $C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - 27C_n^7 + \ldots = (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}} \sin\frac{2n\pi}{3}$;

8. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1996}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1996}$$

a) i b) 2 c) –i d) –2 e) 2i f) –2i

9. Să se calculeze valoarea expresiei E:

Fie $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. Să se calculeze :

$$E=(1+\varepsilon)\left(1+\varepsilon^{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\varepsilon^{1997}\right).$$

a) $E=1$ b) $E=2$ c) $E=2^{663}$ d) $E=2^{1997}$ e) $E=2^{665}$ f) $E=4$

Pregătire Admitere – Algebră şi analiză matematică; 27.04.2013

Progresii: Progresii aritmetice şi geometrice.

1	Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Dacă $a_2 = 6$ şi $r = 5$, atunci a_7 are valoarea:			
a) 41	b) 26	c) 21	d) 11	e) 31

2	Se dă progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Dacă $a_2 = 4$ şi $r = 3$ atunci a_7 are valoarea:			
a) 1	b) 17	c) 19	d) 14	e) 21

3	Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă: a1=2 și a5=14.			
a) S=610;	b) S=613;	c) S=607;	d) S=608;	e) S=609;

4	Să se calculeze suma $S = \sum_{k=1}^{13} k \cdot 2^k$			
a) S=196612;	b) S=196610;	c) S=196611;	d) S=196608;	e) S=196614;

5	Să se determine $m \in R$ astfel încât ecuația $x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică și apoi să se rezolve ecuația:			
a) m=-25, x_1=-1, x_2=0, x_3=1;	b) m=23, x_1=-1, x_2=1, x_3=3;	c) m=23, x_1=1, x_2=3, x_3=5;	d) m=23, x_1=3, x_2=5, x_3=7;	e) m=-25, x_1=-2, x_2=-1, x_3=0;

6	Să se determine *x* astfel încât următorul triplet să fie format din numere în progresie geometrică: $\lvert x+1\rvert, \quad -4 \quad \lvert 3x+5\rvert$			
a) $x \in \left\{-\frac{11}{3}, 1\right\}$	b) $x \in \left\{1, +\frac{11}{3}\right\}$	c) $x \in \phi$	d) $x \in \{1\}$	e) 50100

7.	Să se calculeze expresia $E = \frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{1+a^2+a^4+....a^{2n-2}}$			
a) E=$\frac{a+1}{a^n+1}$	b) E=$\frac{1}{a}$	c) E=$\frac{a^n+1}{a-1}$	d) E=$\frac{a}{a^n+1}$	e) E=$\frac{a^n+1}{a^{2n}+1}$

8.	Fiind dată o progresie aritmetică în care sunt îndeplinite simultan următoarele condiții: a) suma primilor patru termeni este 40; b) suma ultimilor patru termeni este 104; c) suma tuturor termenilor este 216; Primul termen a1 și rația r sunt:			
a) a_1=7 și *r*=2	b) a_1=5 și *r*=2	c) a_1=7 și *r*= -3	d) a_1=4 și *r*=7	e) a_1=4 și *r*=8

9.	Dacă $S_1, S_2, S_3,\ldots, S_p$ sunt sumele primilor *n* termeni ai unor progresii aritmetice, având primii termeni 1, 2, 3, …, p și rațiile corespunzătoare 1, 3, 5, …, atunci suma $S=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_p$ este:			
a) S = n+p+1;	b) S = np;	c) S = $\frac{np}{2}$ (np+1);	d) S = $\frac{np}{2}$;	e) S = np+1;

10.	Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie aritmetică, atunci $S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2$ este:		
a) $S = \frac{1}{2k+1}(a_1^2 + a_{2k}^2)$;	b) $S = \frac{2k-1}{k}(a_1^2 - a_{2k}^2)$;	c) $S = \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2)$	d) $S = \frac{1}{2k}(a_1^2 + a_{2k}^2)$;
e) $S = \frac{2k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2)$;			

11.	Dacă numerele reale x, y, z au simultan proprietatile: 1. x, y+4, z sunt în progresie aritmetică; 2. x, y, z sunt în progresie geometrică; 3. x, y+4, z+32 sunt în progresie geometrică, atunci:		
a) x = 6 , y=2 , z=18;	b) x = 18, y=6 , z=2;	c) x=2 , y=6 , z=18;	d) $x = \frac{2}{9}$, $y = -\frac{10}{9}$, $z = \frac{50}{9}$;
e) x = 2, y=6, z=18 sau $x = \frac{2}{9}$, $y = -\frac{10}{9}$, $z = \frac{50}{9}$;			

Pregătire Admitere – Algebră şi analiză matematică; 27.04.2013

Funcţii continue: Puncte de discontinuitate de prima speţă şi a doua speţă. Continuitate laterală. Operaţii cu funcţii continue. Proprietatea lui Darboux. Proprietăţile funcţiilor continue şi rezolvarea de ecuaţii şi inecuaţii.

1	Fie $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 1 \\ x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$, $a \in R$. Funcţia f este continuă pe R dacă:			
a) a= -1	b) a=0	c) a= -2	d) a=1	e) a= -5

2	Fie $f: [-1,2] \to R, f(x) = \left[x - \frac{1}{2}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este:			
a) $\{-1,0,1\}$	b) $\{-1, \frac{1}{2}, 1\}$	c) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$	d) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$	e) $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\}$

3	Se consideră f : $\Re$-> $\Re$, $f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ (\sin x + \cos x)^{\frac{m}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$. Pentru ce valori ale lui *m* funcția f este continuă:			
a) m=1;	b) m=2;	c) m=-2;	d) m$\in \Re \backslash \{2\}$;	e) m=0;

4. Funcția f : R ->R,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} ln \frac{|1-x^2|}{1+x^2} & , \text{dacă } x \in R \setminus \{-1 ;\ 0 ;\ 1\} \\ -2 , \text{dacă } x \in \{-1; 0; 1\} \end{cases}$$ este:

a) Continuă pe **R**;
b) Discontinuă în x=0;
c) Discontinuă în x= -1 și x=1;
d) Derivabilă în x=0;
e) Derivabilă în x=1;

5. Se consideră funcția f : R ->R,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2x^2 + 1} & , x \in (-\infty , 1] \\ 2ax + 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$. Să se determine valorile parametrului real a, astfel încât funcția f să fie continuă în a = 1.

6. Să se studieze continuitatea funcției f : R ->R, f(x)=$\begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x^2}, & x\neq 0 \\ \frac{3}{2}, & x=0 \end{cases}$

7. Fie funcția f : R ->R,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2-1}\sin\frac{\pi(x^2-1)}{x^2+1} & , x\varepsilon R \setminus \{-1,1\} \\ \alpha & , x\varepsilon\{-1,1\} \end{cases} \quad , \alpha\varepsilon R$$

Să se studieze continuitatea funcției f discutând dupa valorile parametrului α.

8. Pentru ce valori ale parametrului real α, funcția: f : R ->R, f(x)=$\begin{cases} (\sin x + e^x)^{\frac{1}{x}} & , x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$
este continuă în origine?

9. Să se studieze continuitatea funcției f: (0, +∞) -> R, f(x)=$\begin{cases} e^x + \ln x, & \text{pentru } x\varepsilon[0,1] \\ x^{\frac{1}{x-1}}, & \text{pentru } x\varepsilon(1,+\infty) \end{cases}$

10. Să se studieze continuitatea funcției f:[-1,1] -> R, f(x)= x [x];

11. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcției f : [1,e^2] ->R , f(x) = [ln x].

12. Se consideră funcția f:[-1,1] -> R, f(x)=$\begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & x\varepsilon[-1,1]\setminus\{0\} \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$,αεR
Să se determine valorile lui α pentru care funcția f este continuă pe [-1, 1].

13. Se consideră funcția f:R\{1} -> R, f(x) = $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+x}{x^{2n}+1}$. Să se expliciteze și apoi să se studieze continuitatea.

14. a) Să se expliciteze funcția f: R-> R dată prin: f(x)=$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x+|x-1|e^{nx}}{1+e^{nx}}$
b) Să se studieze continuitatea funcției de la punctual a).

15. Să se demonstreze că ecuația (x+1) 2^{x+1}=1 admite cel puțin o rădăcină reală în intervalul [-1,0].

16. Se consideră ecuația $x^3+x^2+mx-1=0$, m ∈ R . Să se arate că pentru orice m ∈ R, ecuația are o rădacină în intervalul [-1,1].

17. Se consideră funcția f :R\{-1,0} ->R, f(x)=$\lim_{n\to\infty}\frac{2+x^n(x^2+5)}{x(x^n+5)}$. Să se expliciteze funcția f și să se studieze continuitatea sa.

18. Să se demonstreze că funcțiile de mai jos nu au proprietatea lui Darboux :

a) f:R->R, f(x)= [x]-x;
b) f:R->R, f(x)= sign x;
c) f:R->R , f(x)=[sin x];